9/12/2020 ①

<u>Θεώρημα Dini</u>: Έστω (X,d) συμπαγής μ.χ., $\{f_n\} \subseteq C(X)$, $f \in C(X)$, τ.ω. $f_n \xrightarrow{\text{κ.σ.}} f$.
Αν η $\{f_n\}$ είναι μονότονη ακολουθία συναρτήσεων, τότε $f_n \xrightarrow{\text{ομ.}} f$.

<u>Απόδειξη</u>: Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι η $\{f_n\}$ είναι φθίνουσα (δηλ. $f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$, $\forall x \in X$, $\forall n \in \mathbb{N}$).

Θέτουμε $g_n := f_n - f$. Τότε, $\{g_n\}$ φθίνουσα ακολουθία συναρτήσεων και $g_n \xrightarrow{\text{κ.σ.}} 0$.
Για $n \in \mathbb{N}$, ορίζουμε
$K_n := \{x \in X : g_n(x) \geq \varepsilon\}$, για $\varepsilon > 0$.

• <u>Ισχυρισμός 1</u>: $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = \emptyset$.

Αν όχι, $\exists x_0 \in K_n$, $\forall n \in \mathbb{N} \Longrightarrow g_n(x_0) \geq \varepsilon$, $\forall n \in \mathbb{N}$, άτοπο γιατί $g_n(x_0) \xrightarrow{n \to \infty} 0$.

• <u>Ισχυρισμός 2</u>: $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, τ.ω. $K_{n_0} = \emptyset$.

<u>Θεώρημα</u> (Κιβωτισμός του Cantor):
(μισό θεώρημα)

Έστω $L_1 \supseteq L_2 \supseteq L_3 \supseteq \dots$

μία (φθίνουσα) αριθμήσιμη ακολουθία μη κενών συμπαγών συνόλων. Τότε $\bigcap_{n=1}^{\infty} L_n \neq \emptyset$.

<u>Απόδειξη:</u> Αφού $L_n \neq \emptyset$, $\exists x_n \in K_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Έστω $N \in \mathbb{N}$. Τότε, $x_N \in L_N \xRightarrow[\text{φθίνουσα}]{\{L_n\}}$

$\forall n \geq N$, $x_n \in L_N$. Άρα, η ακολουθία $\{x_n\}_{n=N}^{\infty}$

είναι ακολουθία από το συμπαγές $L_N \Longrightarrow$

$\exists$ υπακολουθία $\{x_{k_n}\}_{n=N}^{\infty}$ της $\{x_n\}_{n=N}^{\infty}$ και

$\exists x_0 \in L_N$, τ.ω. $x_{k_n} \longrightarrow x_0$.

- Όμως, $x_{k_n} \in L_{k_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ και $\forall n \geq N$,

έχουμε $n \leq k_n \Longrightarrow L_N \supseteq L_{k_N}$, $\forall n \geq N$

$\xRightarrow{L_N \text{ συμπαγές}} x_0 \in L_N \xRightarrow[\substack{\text{φυσικός} \\ x_0 \text{ ανεξ.} \\ \text{του } N}]{N \text{ τυχόν}} x_0 \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} L_n$ ▨

- $\{K_n\}$ φθίνουσα ακολουθία συμπαγών συνόλων:

$$K_n = \{x \in X : g_n(x) \geq \varepsilon\}.$$

$\forall n \in \mathbb{N}$, K_n κλειστό, γιατί αν $\{x_m\} \subseteq K_n$, τ.ω.

$x_m \longrightarrow x^*$, τότε $g_n(x_m) \geq \varepsilon \xRightarrow{g_n \text{ συνεχής}}$

$g_n(x^*) \geq \varepsilon \Rightarrow x^* \in K_n. \xRightarrow[X \text{ συμπαγής}]{K_n \subseteq X} K_n$ συμπαγές.

Τέλος, θδο $\{K_n\}$ φθίνουσα, δηλ. $K_n \supseteq K_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Έστω $x \in K_n \Rightarrow g_{n+1}(x) \geq \varepsilon \xRightarrow{g_{n+1}(x) \leq g_n(x)}$

$g_n(x) \geq \varepsilon \Rightarrow x \in K_n \Rightarrow K_{n+1} \supseteq K_n$.

- Άρα, από το Θεώρημα που μόλις δείξαμε και από Ισχυρισμό 1, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, τ.ω. $K_{n_0} = \emptyset$.

$\Longrightarrow$ Ο Ισχυρισμός 2 αποδείχθηκε.

- Για το $\varepsilon > 0$ που σταθεροποιήσαμε, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω.

$K_{n_0} = \emptyset$, $K_{n_0} = \{x \in X : g_{n_0}(x) \geq \varepsilon\}$

$\Longrightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}$, τ.ω. $\forall x \in X$, $g_{n_0}(x) < \varepsilon$

$\overset{\{g_n\}}{\underset{\text{φθιν.}}{\Longrightarrow}} \exists n_0 \in \mathbb{N}$, τ.ω. $\forall x \in X$, $0 \leq g_n(x) < \varepsilon$, $\forall n \geq n_0$

$\Longrightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}$, τ.ω. $\forall x \in X$, $\forall n \geq n_0$, να ισχύει

$f(x) - \varepsilon < f(x) \leq f_n(x) < f(x) + \varepsilon \Longleftrightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

$\Longrightarrow f_n \xrightarrow{\text{ομοιομ.}} f$. $\boxtimes$

<u>Παράδειγμα</u>: Έστω $f_n : (0,1) \to \mathbb{R}$, με τύπο $f_n(x) = x^n$, $\forall x \in (0,1)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Τότε, $\forall x \in (0,1)$, $x^n \xrightarrow{n \to \infty} 0 \Longrightarrow$

$f_n \xrightarrow{\text{κ.σ.}} 0$

- $\{f_n\}$ είναι φθίνουσα ακολουθία συναρτήσεων.

- Έστω ότι $f_n \xrightarrow{\text{ομ.}} 0$. Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, τ.ω. $\forall n \geq n_0$, $\forall x \in (0,1)$, ισχύει $|\underbrace{f_n(x)}_{= x^n} - 0| < \varepsilon$

Διαλέγουμε $x = x_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)$

$\Longrightarrow f_n(x_n) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \to \frac{1}{e}$

$\Longrightarrow \exists n_0' \in \mathbb{N}$, τ.ω. $\forall n \geq n_0'$: $f_n(x_n) > \frac{1}{2e}$

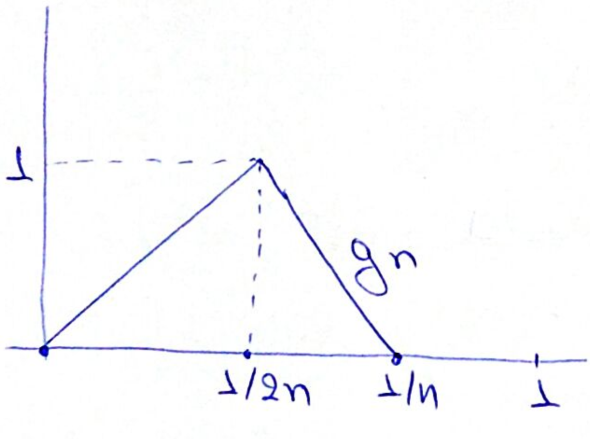
Άρα, αν εξ' αρχής διαλέξουμε $\varepsilon = \frac{1}{2c}$ καταλήγουμε σε άτοπο $\Longrightarrow f_n \xrightarrow{\text{ομ.}} 0$. $\boxtimes$

Ομοιόμορφη σύγκλιση κ' Ολοκλήρωση - παραγώγιση

Ερώτημα: Έστω ότι $f_n \xrightarrow{\text{κ.σ.}} f$

$$\overset{?}{\Longrightarrow} \int_\alpha^\beta f_n \longrightarrow \int_\alpha^\beta f$$

Παράδειγμα: Έστω $g_n(x) = \begin{cases} 2nx, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2n} \\ -2nx+2, & \frac{1}{2n} \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0, & \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$



Θέτουμε, $f_n := \dfrac{g_n}{\int_0^1 g_n} = \dfrac{g_n}{\frac{1}{2n}} = 2ng_n$

$\Longrightarrow \int_0^1 f_n = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f_n = 1.$

Όμως $f_n \xrightarrow{\text{κ.σ.}} 0$ (άρα, $\int_0^1 f_n \not\to \int_0^1 (\lim f_n) = 0$)

Για $x=0$: $f_n(0) = 2n \cdot g_n(0) = 2n \cdot 0 = 0 \xrightarrow{n\to\infty} 0$

Έστω $x \in (0,1]$: $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, τ.ω. $\frac{1}{n_0} < x \Longrightarrow$

$\forall n \geq n_0$, $\frac{1}{n} < x \Longrightarrow \forall n \geq n_0$, $f_n(x) = 2n \cdot g_n(x) = 0$

$\Longrightarrow f_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} 0 \Longrightarrow f_n \xrightarrow{κ.σ.} 0$. ☒

Θεώρημα 1: Έστω $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$, τ.ω. $f_n \xrightarrow{ομ.} f$.

Αν $\forall n \in \mathbb{N}$, η f_n είναι Riemann ολοκληρώσιμη και η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη, τότε

$$\int_a^b f_n \longrightarrow \int_a^b f.$$

Απόδειξη: $\left| \int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq$

$\int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,dx \leq \int_a^b \|f_n - f\|_\infty\,dx$

$= \|f_n - f\|_\infty (b-a) \xrightarrow[f_n \xrightarrow{ομ.} f]{n\to\infty} 0$. ☒

Ερώτημα: Έστω $\{f_n\}$ ακολουθία παραγωγίσιμων συναρτήσεων, τ.ω. $f_n \xrightarrow{ομ.} f \overset{?}{\Longrightarrow} f_n' \to f'$ (τουλάχιστον κατά σημείο).

Απάντηση: Όχι.

Π.χ. $f_n : [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$, $n \in \mathbb{N}$

$\Longrightarrow f_n \xrightarrow{ομ.} 0$, γιατί αν $\varepsilon > 0$, τότε $\exists n_0 \in \mathbb{N}$

με $\frac{1}{\sqrt{n_0}} < \varepsilon \implies \forall n \geq n_0, \forall x \in [0, \pi/2]$:

$$|f_n(x) - 0| = \frac{|\sin(nx)|}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n_0}} < \varepsilon.$$

- $f_n'(x) = \sqrt{n} \cdot \cos(nx), \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$

Για $x = \frac{\pi}{2}$, $n = 4k$: $f'_{4k}(\frac{\pi}{2}) = \sqrt{4k} \cdot \cos(4k \cdot \frac{\pi}{2}) =$

$\sqrt{4k} \cdot 1 \xrightarrow[k \to \infty]{} +\infty$

$\implies f_n'(\frac{\pi}{2})$ δεν συγκλίνει

$\implies \{f_n'\}$ δεν συγκλίνει ούτε κατά σημείο.

<u>Θεώρημα 2</u>: Έστω $f_n : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ ακολουθία συνεχώς παραγωγίσιμων συναρτήσεων, τ.ω. $f_n' \xrightarrow{\text{ομ.}}$ σε κάποια $g : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$. Αν $\exists x_0 \in [\alpha, \beta]$, τ.ω. $\{f_n(x_0)\}$ να συγκλίνει, τότε $\exists$ αντιπαράγωγος f της g, τ.ω.

$$f_n \xrightarrow{\text{ομ.}} f.$$

<u>Απόδειξη</u>: Θέτουμε $c := \lim_n f_n(x_0)$. Έχουμε:
$\in [\alpha, \beta]$

$f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^{x} f_n'(t)\, dt \xrightarrow{\Theta 1}$

$f_n(x) \longrightarrow c + \int_{x_0}^{x} g(t)\, dt =: f(x), \forall x \in [\alpha, \beta]$

Χρησιμοποιήσαμε ότι f_n' συνεχής, $\forall n \in \mathbb{N} \implies g$ συνεχής)

$\Rightarrow f_n \xrightarrow{\kappa.\sigma.} c + \int_{x_0}^{x} g(t)\,dt := f(x)$., όπου f

είναι αντιπαράγωγος της g.

• Αρκεί νδο η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη.

Έχουμε: $|f_n(x) - f(x)| = |(f_n(x) - f_n(x_0)) + (f_n(x_0) - c) +$

$\int_{x_0}^{x} f'(t)\,dt| = |\int_{x_0}^{x} f_n'(t)\,dt - \int_{x_0}^{x} g(t)\,dt + (f_n(x_0) - c)|$

$\leq |\int_{x_0}^{x} |f_n'(t) - g(t)|\,dt| + |f_n(x_0) - c|$

(Βάζουμε απόλυτο και έξω από το ολοκλήρωμα, γιατί μπορεί $x_0 > x$.)

$\leq |\int_{x_0}^{x} \|f_n' - g\|_\infty| + |f_n(x_0) - c|$

$\Rightarrow \forall x \in [a,b]$, $|f_n(x) - f(x)| \leq \|f_n' - g\|_\infty \cdot |x - x_0|$

$+ |f_n(x_0) - c| \leq \|f_n' - g\|_\infty \cdot (b-a) + |f_n(x_0) - c|$, $\forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \|f_n - f\|_\infty \leq \|f_n' - g\|_\infty \cdot |x - x_0| + |f_n(x_0) - c|$, $\forall n \in \mathbb{N}$

$\xRightarrow[f_n(x_0) \to c]{f_n' \xrightarrow{o\mu.} g} \|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n \to \infty} 0 \Rightarrow f_n \xrightarrow{o\mu.} f$ ☒

Σειρές Συναρτήσεων

Ορισμός: Έστω $\{f_n\}$ μία ακολουθία πραγματικών συναρτήσεων από τον X. Το n-οστό μερικό άθροισμα $S(f_n) = S_n = s_n := \sum_{k=1}^{n} f_k$ της σειράς

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k .$$

Λέμε ότι η $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ συγκλίνει κατά σημείο

(αντ. ομοιόμορφα) στην $f: X \to \mathbb{R}$, αν η ακολουθία $\{S_n\}$ συγκλίνει κατά σημείο (αντ. ομοιόμορφα) στην f.

Γράφουμε: $\sum_{k=1}^{\infty} f_n \overset{\text{κ.σ.}}{=} f$ ή $\sum_{k=1}^{\infty} f_n \overset{\text{ομ.}}{=} f$.

Θεώρημα (Κριτήριο ομοιόμορφης σύγκλισης του Weierstrass.): Έστω $\{f_n\}$ μία ακολουθία πραγματικών συναρτήσεων από τον X. Έστω ότι $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists M_n \geq 0$, τ.ω. $|f_n(x)| \leq M_n, \forall x \in X$ και $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$ συγκλίνει. Τότε, $\exists f: X \to \mathbb{R}$, τ.ω.

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k \overset{\text{ομ.}}{=} f .$$

Απόδειξη: Θέτουμε $S_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$, $n \in \mathbb{N}$

Από προηγούμενο θεώρημα, αρκεί νδο η $\{S_n\}$ είναι ομοιόμορφα Cauchy.

Έστω $m>n$ ($m,n \in \mathbb{N}$). Τότε:

$$\|S_m - S_n\|_\infty = \|\sum_{k=n+1}^{m} f_k\|_\infty \leq \sum_{k=n+1}^{m} \|f_k\|_\infty$$

$$\leq \sum_{k=n+1}^{m} M_k \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} M_k \quad (1)$$

- Επειδή $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$ συγκλίνει, η ουρά της σειράς, δηλ. $\sum_{k=n+1}^{\infty} M_k$, τείνει στο 0, για $n \to \infty$.

Άρα, για $\varepsilon>0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, τ.ω. $\forall n \geq n_0$, $\sum_{k=n+1}^{\infty} M_k < \varepsilon$

$\xRightarrow{(1)}$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, τ.ω. $\forall m>n\geq n_0$, να ισχύει

$\|S_m - S_n\|_\infty < \varepsilon$

$\Longrightarrow \{S_m\}$ ομοιόμορφα Cauchy. ∎

Ασκ 5 Φυλλ. 4 Έστω $\{f_n\}$ μία ακολουθία πραγματικών συναρτήσεων από κάποιον συμπαγή μ.χ. (X,d) και $f: X \to \mathbb{R}$ συνεχής. Τότε,

$f_n \xrightarrow{\text{ομ.}} f$ αν-ν $\forall \{x_n\} \subseteq X$, τ.ω. $x_n \to x_0$, για κάποιο $x_0 \in X$, ισχύει $f_n(x_n) \to f(x_0)$.

<u>Απόδειξη</u>: „$\Rightarrow$" $f_n \xrightarrow{\text{ομ.}} f \Rightarrow$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, τ.ω. $\forall n \geq n_0(\varepsilon), \forall x \in X$,

$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/2$.

Έστω, $\{x_n\} \subseteq X$, τ.ω. $x_n \to x_0$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε, $\forall n \geq n_0$,

$|f_n(x_n) - f(x_n)| < \varepsilon/2$.

- f συνεχής $\xRightarrow{x_n \to x_0}$ $f(x_n) \to f(x_0)$

$\Rightarrow \exists n_0' \in \mathbb{N}$, τ.ω. $\forall n \geq n_0'$, $|f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon/2$

- Θέτουμε $n_0 = \max\{n_0', n_0(\varepsilon)\}$. Τότε, $\forall n \geq n_0(\varepsilon)$

$|f_n(x_n) - f(x_0)| = |(f_n(x_n) - f(x_n)) + (f(x_n) - f(x_0))| <$

$\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

$\Rightarrow f_n(x_n) \to f(x_0)$